

Ejercicios de Matemáticas

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + z = 4 \\ -x + 2y + z = 6 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}
 \end{array}$$

(Sol: a) $x = 2 + 4z$, $y = -2 + 7z$, b) $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, c) incompatible, d) $x = 5$, $y = 0$, $z = -2$)

2. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (-2, 2)$ referidos a una base ortonormal, Calcula:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} & (\text{Sol: } -6) \\
 \text{b) } 2\vec{u} \cdot \vec{v} & (\text{Sol: } -12) \\
 \text{c) } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} & (\text{Sol: } 2)
 \end{array}$$

3. Calcula un vector unitario y perpendicular a $\vec{u} = (8, -6)$. (Sol: $(3/5, 4/5)$ o $(-3/5, -4/5)$)

4. Halla las componentes del vector libre \overrightarrow{AB} , siendo $A(2, -3)$ y $B(-5, 9)$. (Sol $(-7, 12)$)

5. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (3, 3)$, calcula:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} & (\text{Sol: } 3) \\
 \text{b) } |\vec{u}| & (\text{Sol: } \sqrt{5}) \\
 \text{c) } |\vec{u} + \vec{v}| & (\text{Sol: } \sqrt{29}) \\
 \text{d) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) & (\text{Sol: } \frac{\sqrt{10}}{10})
 \end{array}$$

6. Dado el vector $\vec{u} = (-3, 4)$, halla:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \text{El ángulo que forma con } \vec{v} = (2, -1) & (\text{Sol: } 153^\circ 26' 6'') \\
 \text{b) } \text{El valor de } k \text{ para que } \vec{w} = (2, k) \text{ sea perpendicular a } \vec{u} & (\text{Sol } k = 3/2)
 \end{array}$$

7. Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, -3)$ y $B(2, 0)$.

8. Calcula el ángulo formado por las rectas: $y = -2x + 3$, $y = 4x + 1$. (Sol: $\alpha = 40^\circ 36' 5''$)

9. Dadas las rectas $r: 3x + 4y + 14 = 0$ y $s: 4x - 3y + 2 = 0$, calcular:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \text{El ángulo que forman.} & (\text{Sol: } 90^\circ) \\
 \text{b) } \text{El punto de intersección.} & (\text{Sol: } (-2, -2))
 \end{array}$$

10. Averigua en cada caso, la ecuación general de la recta paralela y de la recta perpendicular a r que pasa por el punto $(1, 3)$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } r: 3x - 2y + 4 = 0 & (\text{Sol: } 3x - 2y + 3 = 0; 2x + 3y - 11 = 0) \\
 \text{b) } r: \frac{x-2}{6} = \frac{y-4}{2} & (\text{Sol: } x - 3y + 8 = 0; 3x + y - 6 = 0) \\
 \text{c) } y = -2x + 3 & (\text{Sol: } 2x + y - 5 = 0; x - 2y + 5 = 0)
 \end{array}$$

11. Dados los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 2)$ y la recta $r: x - y + 5 = 0$. Halla:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \text{El simétrico de } A \text{ respecto } B. & (\text{Sol: } (5, 3)) \\
 \text{b) } \text{El simétrico de } B \text{ respecto } r. & (\text{Sol: } (-3, 8))
 \end{array}$$

12. Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 15 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ (Sol: es continua en R)

13. a) Halla a para que la función definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{a}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

sea continua para todo valor de x.

b) Una vez hallado este valor de a, obtén la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 2$. (Sol: a) $a = 2$ b) $y - \frac{2}{3} = \frac{-2}{9}(x - 2)$)

14. Calcula las funciones derivadas y simplifica cuando se pueda:

a) $f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1$ (Sol: $f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$)

b) $y = (x^2 + 2x)^3$ (Sol: $y' = 6x^5 + 30x^4 + 48x^3 + 24x^2$)

c) $f(x) = e^{7x^4-3}$ (Sol: $f'(x) = 28x^3 \cdot e^{7x^4-3}$)

d) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ (Sol: $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$)

e) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ (Sol: $y' = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$)

f) $y = \cos x^4$ (Sol: $y' = -\sin x^4 \cdot 4x^3$)

g) $y = \sin^3 x$; (Sol: $y' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$)

h) $y = \sqrt{4x^3 + 1}$ (Sol: $y' = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 1}}$)

i) $y = \ln(3x^4 - 2x)$ (Sol: $y' = \frac{12x^3 - 2}{3x^4 - 2x}$)

j) $y = e^{7x} \cdot \sin^3 x$ (Sol: $y' = e^{7x} \cdot (7 \cdot \sin^3 x + 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x)$)

k) $y = (4x^2 - 2)\sqrt{4x - 2}$ (Sol: $y' = \frac{40x^2 - 16x - 4}{\sqrt{4x - 2}}$)

l) $y = \sin\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$ (Sol: $y' = \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$)

m) $y = \ln(x^2 + 3x)^3$ (Sol: $y' = \frac{3(2x+3)}{x^2 + 3x}$)

n) $y = \ln\left(\frac{xe^x}{1+e^x}\right)$ (Sol: $y' = \frac{1+x+e^x}{x(1+e^x)}$)

15. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{4-2x^2}{x}$ (Sol: A.V. $x = 0$, A.O. $y = -2x$)

16. Halla las asíntotas de la función: $y = \frac{3x^2+1}{x-2}$ (Sol: A.V. $x = 2$, A.O. $y = 3x+6$)